Corso di Statistica - Esercitazione 5

Dott. Davide Buttarazzi

✉ *d.buttarazzi@unicas.it*

Esercizio 1

Si determini lo spazio dei campioni relativo al doppio lancio di un dado. Si individuino i seguenti eventi e si calcoli la probabilità che essi si verifichino:

1. $A : \{''la\ somma\ dei\ due\ lanci\ \grave{e}\ 5''\}$
2. $B : \{''primo\ lancio\ pari''\}$
3. $C : \{''primo\ lancio\ pari\ e\ la\ somma\ dei\ due\ lanci\ \grave{e}\ 5''\ \}$
4. $C : \{''primo\ lancio\ pari\ oppure\ la\ somma\ dei\ due\ lanci\ \grave{e}\ 5''\ \}$

Soluzioni esercizio 1

Indicando con la lettera "f_i" l'esito associato all'evento "lancio di un dado", lo spazio dei campioni è:
$\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}^2 = 36$, ovvero il numero di eventi elementari elevato al numero di prove.

1. $A : \{f_{1,4}\ ,\ f_{2,3}\ ,\ f_{3,2}\ ,\ f_{4,1}\}$

   $P(A) = P(f_{1,4}) + P(f_{2,3}) + P(f_{3,2}) + P(f_{4,1}) = 4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$
2. $B : \{f_2,\ f_4,\ f_6\}$

   $P(B) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
3. $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
4. $P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{5}{9}$

Esercizio 2

La seguente tabella riporta i dati relativi a 100 studenti classificati rispetto al voto nell'esame di statistica e al superamento dell'esame di matematica.

		Superamento esame matematica		
		SI	**NO**	**Tot.**
Voto in statistica	**< 18**	15	15	30
	≥ 18	50	20	70
	Tot.	65	35	100

Si estrae uno studente a caso. Sia A:$\{Voto < 18\}$ e B:$\{Esamedimatematicasuperato\}$, si calcolino:

1. $P(A)$, $P(B)$
2. $P(A \cup B)$
3. $P(B|A)$

4. I due eventi sono indipendenti?

Soluzioni esercizio 2

1. $P(A) = \frac{30}{100} = 0.3$, $P(B) = \frac{65}{100} = 0.65$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

   $P(A \cap B) = \frac{15}{100} = 0.15$, pertanto $P(A \cup B) = 0.3 + 0.65 - 0.15 = 0.8$
3. $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.30} = 0.5$
4. $P(B|A) \neq P(B)$, quindi i due eventi non sono indipendenti.

Esercizio 3

Uno studente può sostenere l'esame di statistica con uguale probabilità con i professori A, B e C, i quali bocciano con probabilità 0.1, 0.3 e 0.2 rispettivamente. Sapendo che uno studente è stato bocciato, qual è la probabilità che abbia sostenuto l'esame con il professore A?

Soluzione esercizio 3

Innanzitutto è opportuno riorganizzare i dati contenuto nel testo come segue:

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$P(bocc|A) = 0.1 = \frac{1}{10}$

$P(bocc|B) = 0.3 = \frac{3}{10}$

$P(bocc|C) = 0.2 = \frac{2}{10}$

Si vuole calcolare $P(A|bocc)$

Per poterla calcolare si può ricorrere al teorema di Bayes:

$P(A|bocc) = \frac{P(bocc|A)P(A)}{P(bocc)}$

È necessario quindi calcolare il denominatore $P(bocc)$. Per farlo, si ricorre alla legge della probabilità totale. Per cui:

$P(bocc) = \sum_{i=1}^{3} P(bocc|prof_i)P(prof_i) = (\frac{1}{10} \times \frac{1}{3}) + (\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}) + (\frac{2}{10} \times \frac{1}{3}) = \frac{3}{15}$

Quindi:

$P(A|bocc) = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{15}} = \frac{1}{6} = 0.16$

Esercizio 4

Da un mazzo di 52 carte francesi si sottrae una carta senza guardarla. Poi si gira un'altra carta: con quale probabilità quest'ultima è di fiori?

Soluzione esercizio 4

Sia F:$\{carta\ di\ fiori\ \}$,

$P(F) = \frac{13}{52}$

$P(1^a \bar{F}) = \frac{39}{52}$ (prima carta non di fiori)

$P(2^a F|1^a \bar{F}) = \frac{13}{51}$ (seconda carta di fiori se la prima non è di fiori)

$P(2^a F|1^a F) = \frac{12}{51}$ (seconda carta di fiori se la prima è di fiori)

Quindi, sfruttando la legge della probabilità totale:

$P(2^a F) = P(2^a F|1^a F)P(1^a F) + P(2^a F|1^a \bar{F})P(\bar{F}) = \frac{12}{51} \times \frac{13}{52} + \frac{13}{51} \times \frac{39}{52} = 0.25$

Esercizio 5

Una popolazione si compone del 40% di fumatori (F) e per il 60% di non fumatori (N). Si sa che il 20% dei fumatori e il 5% dei non fumatori sono affetti da una forma di malattia respiratoria cronica (M). Calcolare la probabilità che:

1. un individuo scelto a caso sia affetto da malattia
2. una persona affetta da malattia sia un fumatore
3. una persona non affetta da malattia sia un fumatore

Soluzione esercizio 5

Innanzitutto è opportuno riorganizzare i dati contenuto nel testo come segue:

$P(F) = 0.4$

$P(N) = 0.6$

$P(M|F) = 0.2$

$P(M|N) = 0.05$

1. Per calcolare $P(M)$ si può ricorrere alla legge della probabilità totale:

   $P(M) = P(M|F)P(F) + P(M|N)P(N) = 0.2 \times 0.4 + 0.05 \times 0.6 = 0.11$
2. $P(F|M) = \frac{P(M|F)P(F)}{P(M)} = \frac{0.2 \times 0.4}{0.11} = 0.73$
3. $P(F|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|F)P(F)}{P(\bar{M})} = \frac{[1-P(M|F)]P(F)}{1-P(M)} = \frac{0.8 \times 0.4}{0.89} = 0.36$

Esercizio 6

Si consideri l'estrazione in blocco (l'ordinamento non conta) di 5 carte da un mazzo di 52 carte francesi. Calcolare la probabilità che le 5 carte estratte siano tutte dello stesso seme.

Soluzione esercizio 6

Utilizzando l'approccio classico, è necessario innanzitutto definire lo spazio dei campioni, ovvero i casi possibili. Nel nostro caso, esso è costituito da tutte le cinquine di carte differenti. Gli eventi elementari sono equiprobabili.

$\Omega = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 2598960$

L'evento di interesse "5 carte dello stesso seme" può essere visto come l'unione dei 4 eventi mutuamente esclusivi:

"5 carte cuori"
"5 carte quadri"
"5 carte fiori"
"5 carte picche"

Ognuno di questi eventi può essere espresso come il numero di combinazioni di classe 5 di 13 elementi. Ovvero, in quanti modi posso combinare (non importa l'ordine) le 13 carte dello stesso seme prendendone 5 per volta. Cioè:

$\binom{13}{5} = \frac{13!}{5!8!} = 1287$

Poichè gli eventi sono mutuamente esclusivi, l'evento unione è la somma delle cardinalità dei singoli eventi. Ovvero:

$E : \{5 \; carte \; dello \; stesso \; seme\} = \binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} = 4 \times \binom{13}{5} = 5148$

Quindi la probabilità di estrarre 5 carte dello stesso seme è:

$P(E) = \frac{casifavorevoli}{casipossibili} = \frac{5148}{2598960} = 0.002$

Nota per assenti o non frequentanti: durante l'esercitazione 5 sono stati richiamati i concetti di:

- **spazio dei campioni**
- **operazioni tra eventi**
- **principali proprietà di unione, intersezione e complementazione**
- **definizione di probabilità ed assiomi di Kolmogorov**
- **probabilità condizionata**
- **regole di conteggio**